OPTYMALIZACJA DYSKRETNA

Zagadnienia decyzyjne, w których chociaż jedna zmienna decyzyjna przyjmuje wartości dyskretne (całkowitoliczbowe), nazywamy dyskretnymi zagadnieniami decyzyjnymi.

Model matematyczny opisujący tą sytuację nazywamy dyskretnym zadaniem decyzyjnym (DZD). Zajmiemy się jedynie takimi zagadnieniami dyskretnymi, w których relacje zachodzące między poszczególnymi wielkościami są liniowe. Formułowane zadania będą zatem zadaniami programowania dyskretnego, liniowego (PDL).

Wśród zadań programowania dyskretnego, liniowego wyróżnia się trzy ich typy:

- **zadania programowania całkowitoliczbowego liniowego (PCL) – gdzie wszystkie zmienne są liczbami całkowitymi,**

- **zadania programowania binarnego liniowego (PBL) – gdzie wszystkie zmienne są liczbami binarnymi (tzn. 0 lub 1),**

- **zadania programowania mieszanego liniowego (PML) – gdzie część zmiennych to zmienne ciągłe, część – zmienne całkowite, a część – zmienne binarne.**

Przykład zadania PCL (planowanie produkcji i transportu)

Projektowana jest budowa od jednej do 4 nowych piekarni mających zaopatrywać w pieczywo 5 miejscowości: A, B, C, D i E. Piekarnie można wybudować w miejscowościach A, B, C i E. Dzienne zdolności wytwórcze Z_i piekarni (w liczbach bochenków chleba), popyt P_j na pieczywo (w liczbach bochenków chleba) z czterech miejscowości oraz oszacowane przyszłe jednostkowe koszty produkcji k_i i przewozu pieczywa c_{ij} (w zł za jeden bochenek chleba) podano w Tabeli 3.1. Oszacowano również, że koszty wybudowania każdej z piekarni są jednakowe.

Tabela 3.1

c_{ij}	A	B	C	D	E	Z_i	k_i
A	0	0,4	0,6	0,8	0,7	3000	8,7
B	1	0	1,2	0,9	0,6	2800	6,5
C	0,5	0,5	0	0,8	0,4	2700	7,9
E	1	1,2	0,4	0,5	0	3500	9,1
P_j	1000	2000	1500	1600	1400	-	-

Zaproponować wielkość rocznej produkcji każdego z zakładów oraz plan transportu pieczywa, dzięki którym całkowite koszty produkcji i transportu będą możliwie najniższe.

Rozwiązanie:

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

M - liczba piekarni;
N - liczba miejscowości dostarczania pieczywa;
y_{ij} - wielkość produkcji i-tej piekarni przeznaczona dla j-tej miejscowości, $i=\overline{1,M}$, $j=\overline{1,N}$.

Pozostałe oznaczenia jak w treści zadania.

Funkcja celu będzie miała postać:

(3.1) $$\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} y_{ij}\cdot c_{ij} + \sum_{i=1}^{M} k_i \cdot \sum_{j=1}^{N} y_{ij} \rightarrow \min$$

przy ograniczeniach:

(3.2) $$\sum_{j=1}^{N} y_{ij} \le Z_i, \quad i=\overline{1,M}$$

(3.3) $$\sum_{i=1}^{M} y_{ij} \ge P_j, \quad j=\overline{1,N}$$

(3.4) $$y_{ij} \ge 0, \quad i=\overline{1,M},\ j=\overline{1,N}$$

(3.5) $$y_{ij} - \text{calkowitoliczbowe}, \quad i=\overline{1,M},\ j=\overline{1,N}$$

Zadanie (3.1) – (3.5) jest zadaniem programowania całkowitoliczbowego, liniowego (PCL). Funkcja celu (3.1) postuluje minimalizację łącznych kosztów transportu (pierwszy składnik) i produkcji (drugi składnik). Warunek (3.2) zapewnia, że wielkość produkcji każdej z piekarń nie będzie większa aniżeli jej zdolności wytwórcze. Spełnienie warunku (3.3) zapewnia, że wielkość produkcji każdej z piekarń nie będzie mniejsza aniżeli lokalne zapotrzebowanie. Warunek (3.4) wymusza, nieujemność wielkości produkcji, a (3.5) – jej całkowitoliczbowość (nie można przecież produkować ½ bułki lub 10 ¾ chleba).

Dla naszego zadania mamy:

- **M=4;**
- **N=5;**
- **Z_i - przedostatnia kolumna tabeli 3.1;**
- **k_i - ostatnia kolumna tabeli 3.1;**
- **P_j - ostatni wiersz tabeli 3.1;**
- $\mathrm{y}^* = \left[y_{ij}^* \right]_{M \times N}$ **- macierz optymalnych wielkości produkcji i przewozu z poszczególnych piekarni do miejscowości.**

Po podstawieniu danych do zadania i rozwiązaniu go otrzymamy:

(3.6) $$\mathrm{y}^* = \begin{bmatrix} 1000 & 0 & 0 & 126 & 0 \\ 0 & 2000 & 0 & 800 & 0 \\ 0 & 0 & 1500 & 674 & 526 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 874 \end{bmatrix}$$

Plan przewozu pieczywa zawiera macierz y^*. Wynika z niej, że wielkość produkcji poszczególnych piekarni jest następująca:

- **dla piekarni w miejscowości A: 1000+126=1126;**
- **dla piekarni w miejscowości B: 2000+800=2800;**
- **dla piekarni w miejscowości C: 1500+674+526=2700;**
- **dla piekarni w miejscowości E: 874.**

Zapewni to nam minimalny koszt produkcji i transportu w wysokości 58850 zł, tzn.:

$$\begin{aligned} &58850 = \\ &= 1000 \cdot 0 + 126 \cdot 0.8 + 2000 \cdot 0 + 800 \cdot 0.9 + 1500 \cdot 0 + 674 \cdot 0.8 + \\ &+ 526 \cdot 0.4 + 874 \cdot 0 + 8.7 \cdot 1126 + 6.5 \cdot 2800 + 7.9 \cdot 2700 + 9.1 \cdot 874 \end{aligned}.$$

Przykład zadania PBL (zagadnienie optymalnego przydziału)

Na wydziale obróbki mamy cztery maszyny (M1, M2, M3, M4) i czterech obsługujących je robotników (R1, R2, R3, R4). Znamy wydajność każdego robotnika na poszczególnych stanowiskach. Wydajność tą określa liczba detali, które dany robotnik może wykonać na danej maszynie w ciągu jednej godziny. Przedstawiono ją w tabeli 3.2.

Tabela 3.2

w_{ij}	R1	R2	R3	R4
M1	6	7	8	4
M2	12	6	9	8
M3	10	5	9	7
M4	13	11	7	9

Należy ustalić taki przydział robotników do poszczególnych stanowisk, aby łączna wydajność całego zespołu była maksymalna.

UWAGA!

Zagadnienie to można łatwo uogólnić i określić następujący problem decyzyjny:

Mamy m stanowisk i n pracowników. Znamy macierz wydajności $W = \lfloor w_{ij} \rfloor_{m\times n}$, gdzie w_{ij} jest wydajnością j-tego pracownika na i-tym stanowisku.

Należy ustalić taki przydział pracowników do stanowisk pracy, aby łączna wydajność całego zespołu była maksymalna.

<u>Rozwiązanie:</u>

Wprowadźmy następujące zmienne decyzyjne:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jezeli } j \text{ - ty pracownik zostal przydzielony do } i - \text{tego stanowiska} \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Problem optymalnego przydziału możemy sformułować w postaci następującego liniowego zadania decyzyjnego:

znaleźć takie wartości zmiennych x_{ij}, aby:

(3.7) $$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} w_{ij}x_{ij} \to \max,$$

przy warunkach:

(3.8) $$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad (i = 1,2,\ldots,m),$$

(3.9) $$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \quad (j = 1,2,\ldots,n)$$

(3.10) $$x_{ij} \in \{0,1\} \quad (i = 1,2,\ldots,m;\, j = 1,2,\ldots,n)$$

Zadanie (3.7) – (3.10) jest zadaniem programowania binarnego, liniowego (PBL). Funkcja celu (3.7) postuluje maksymalizację łącznej wydajności całego zespołu. Warunek (3.8) zapewnia, że każde stanowisko zostanie obsadzone przez jednego pracownika. Natomiast warunek (3.9) wymusza, aby każdy pracownik został przydzielony do jednego tylko stanowiska.

Sformułowane zadanie optymalnego przydziału, mimo że jest klasycznym problemem programowania dyskretnego, może być rozwiązywane metodami programowania liniowego (metodą simpleks lub innymi metodami).

Dzieje się tak dlatego, że macierz współczynników tego zadania jest tzw. *macierzą unimodularnę*, czyli taką, że każdy jej podwyznacznik stopnia *m*-tego jest równy *–1*, *0* lub *1*, a wektor wyrazów wolnych jest całkowitoliczbowy. Dowodzi się, że w tej sytuacji każde rozwiązanie bazowe (a więc również rozwiązanie optymalne), będące przecież wierzchołkiem zbioru ograniczeń, będzie spełniało warunek całkowitoliczbowości.

Wyznaczenie dopuszczalnego rozwiązania zadania (3.7) – (3.10), a tym samym zagadnienia optymalnego przydziału, jest stosunkowo proste. Będzie nim

każda macierz o wymiarach $m \times n$, składająca się z zer i jedynek, w której w każdym wierszu i każdej kolumnie jest dokładnie jedna jedynka.

W przykładzie 3.2 będzie to np. macierz:

$$\mathbf{X}^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dla rozwiązania określonego macierzą X^* łączna wydajność zespołu wynosi 38, tzn. $38 = 8 \cdot 1 + 12 \cdot 1 + 11 \cdot 1 + 7 \cdot 1$.

METODA PODZIAŁU I OGRANICZEŃ

Do rozwiązywania dyskretnych zadań decyzyjnych stosuje się tzw. metodę podziału i ograniczeń.

Idea metody polega na tym, że tzw. przegląd zupełny (pełny) zbioru ograniczeń *D* zastępujemy przeglądem ukierunkowanym. Pozwala to ocenić pośrednio pewne podzbiory rozwiązań i ewentualnie je odrzucić lub czasowo pominąć, bez utraty rozwiązania optymalnego, co znacznie przyspiesza uzyskanie rozwiązania.