

Podstawy ekonometrii

dr inż. Zbigniew TARAPATA

Wykład 1

**Przypomnienie podstawowych wiadomości
z probabilistyki.**

Literatura:

- 1. G. Konopacki, K. Worwa – Wybrane zagadnienia ze statystyki opisowej, WSE 2002**
- 2. L. Gajek, Kałuszka M. – Wnioskowanie statystyczne. WNT, Warszawa 1996.**
- 3. D. Bobrowski – Probabilistyka w zastosowaniach technicznych. WNT, Warszawa 1980.**
- 4. E. Nowak – Zarys metod ekonometrii. Zbiór zadań. PWE, Warszawa 1994.**

1. Podstawowe wiadomości z probabilistyki.

W modelu matematycznym, który opisuje eksperyment losowy, zbiorowi wszystkich możliwych wyników doświadczenia odpowiada *przestrzeń zdarzeń elementarnych*. Przestrzeń tę oznaczamy symbolem Ω .

Zdarzenie elementarne jest, więc możliwym elementem zbioru Ω . Zdarzenia elementarne oznaczamy najczęściej symbolem ω , $\omega \in \Omega$.

Jeśli określimy pewne zdarzenia nie będące w pewnej ogólności *zdarzeniami elementarnymi*, to mówimy, że mamy do czynienia ze zdarzeniami losowymi. Zdarzenie elementarne jest przykładem zdarzenia losowego. Innym przykładem może być zdarzenie wyrzucenia kostką parzystej liczby oczek. Nie jest to zdarzenie elementarne, które polega w tym przypadku na wyrzuceniu konkretnej liczby oczek.

Probabilistyczny model eksperymentu losowego polega na określeniu przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω , zadaniu na niej rodziny zdarzeń $\mathcal{G} = 2^\Omega$ (zbioru wszystkich możliwych podzbiorów zbioru Ω) oraz przyporządkowaniu każdemu zdarzeniu $A \in \mathcal{G}$ liczby będącej jego prawdopodobieństwem wystąpienia. Intuicyjnym odpowiednikiem prawdopodobieństwa zdarzenia A może być częstość występowania zdarzenia A w dużej liczbie powtórzeń eksperymentu (prawo wielkich liczb).

Zgodnie z tzw. klasyczną definicją prawdopodobieństwa, prawdopodobieństwo jest to stosunek liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających danemu zdarzeniu losowemu do liczby wszystkich zdarzeń elementarnych.

Dla dowolnego $A \in \mathcal{G}$ niech $P(A)$ oznacza prawdopodobieństwo zdarzenia A . Będziemy odtąd zakładać, że spełnione są następujące aksjomaty:

- $P(\Omega)=1$;
- $0 \leq P(A) \leq 1$ dla każdego $A \in \mathcal{G}$;
- $P(\cup A_n) = \sum P(A_n)$ dla dowolnego, skończonego lub nie, ciągu parami rozłącznych zdarzeń $A_1, A_2, A_3, \dots$.

Zdarzenia rozłączne to takie zdarzenia, które nie zawierają wspólnych zdarzeń elementarnych. Każde przyporządkowanie zdarzeniom losowym ich prawdopodobieństwa, które spełnia aksjomaty powyższe nazywać będziemy przestrzenią probabilistyczną. Trójkę $(\Omega, \mathcal{G}, P)$ będziemy nazywać **przestrzenią probabilistyczną**.

Jeśli dopełnienie zdarzenia A do zbioru Ω oznaczmy przez A' , to $A \cup A' = \Omega$. Ponadto zdarzenia A i A' są rozłączne. Zachodzi również:

- $P(A') = P(\Omega) - P(A) = 1 - P(A)$
- $P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$ jeśli $A \subset B$
- $P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Prawdopodobieństwo warunkowe zdarzenia A pod warunkiem, że zaszło zdarzenie B wynosi

$$P(A \mid B) = P(A \cap B) / P(B)$$

Niech $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$, będą parami rozłącznymi zdarzeniami losowymi oraz niech ich suma wynosi Ω .

Wtedy dla dowolnego zdarzenia A zachodzi

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap \Omega) = P(A \cap (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n)) = \\ &= P((A \cap A_1) \cup (A \cap A_2) \cup \dots \cup (A \cap A_n)) = \\ &= P(A \cap A_1) + P(A \cap A_2) + \dots + P(A \cap A_n) = \\ &= P(A \mid A_1) P(A_1) + P(A \mid A_2) P(A_2) + \dots + \\ &\quad + P(A \mid A_n) P(A_n) \end{aligned}$$

jeśli tylko $P(A_i) > 0$ dla $i=1, \dots, n$. Jest to wzór na **prawdopodobieństwo całkowite (zupełne)**.

Przekształcając tę formułę otrzymujemy

$$\begin{aligned} P(A_i \mid A) &= P(A \mid A_i) P(A_i) / P(A) = \\ &= P(A \mid A_i) P(A_i) / \\ &\quad [P(A \mid A_1) P(A_1) + P(A \mid A_2) P(A_2) + \dots + P(A \mid A_n) P(A_n)] \end{aligned}$$

ponieważ

$$P(A_i \mid A) P(A) = P(A_i \cap A) = P(A \mid A_i) P(A_i)$$

Powyższa formuła nosi nazwę **twierdzenia Bayesa**.

Ważnym pojęciem rachunku prawdopodobieństwa jest niezależność zdarzeń. Zdarzenia A i B nazywamy niezależnymi, jeśli

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Zatem, jeśli zdarzenia A i B są niezależne oraz $P(B) > 0$, to

$$P(A \mid B) = P(A \cap B) / P(B) = P(A)P(B) / P(B) = P(A)$$