



EKONOMETRIA

Temat wykładu:

*Liniowy model ekonometryczny (regresji)
z wieloma zmiennymi objaśniającymi –
przypomnienie podstaw rachunku wektorowo-macierzowego*

Prowadzący: dr inż. Zbigniew TARAPATA
e-mail: Zbigniew.Tarapata@isi.wat.edu.pl
http:// zbigniew.tarapata.akcja.pl/p_ekonometria/
tel.: 0-606-45-54-80

Plan wykładu

1. Podstawy rachunku wektorowego
2. Macierze
3. Macierze transponowane
4. Wyznaczniki
5. Macierz odwrotna
6. Układ równań liniowych o n niewiadomych

Podstawy rachunku wektorowego

Wektorem kolumnowym o rozmiarach $m \times 1$ oznaczonego symbolem x nazywamy ciąg m liczb rzeczywistych ustawionych w kolumnę:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \bullet \\ \bullet \\ x_m \end{bmatrix}$$

Liczy x_i ($i=1, \dots, m$) są nazywane elementami (składowymi, współrzędnymi) wektora kolumnowego.

Dwa wektory są równe wtedy i tylko wtedy, gdy ich odpowiednie elementy są równe, co oznacza:

$$x=y \Leftrightarrow x_i=y_i \quad (i=1, \dots, m).$$

Niekiedy piszemy również $x \leq y$ rozumiejąc przez to, że $x_i \leq y_i$ ($i=1, \dots, m$) oraz $x > y$ rozumiejąc przez to, że $x_i > y_i$ ($i=1, \dots, m$).

Macierze

Macierzą $m \times n$ jest prostokątna tablica $m \times n$ liczb rzeczywistych ustawionych w m wierszach i n kolumnach:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \bullet & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \bullet & a_{2n} \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ a_{m1} & a_{m2} & \bullet & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Liczy a_{ij} ($i=1, \dots, m; j=1, \dots, n$) nazywamy elementami macierzy A . Macierz A posiadająca m wierszy i n kolumn nazywamy macierzą o wymiarach $m \times n$ i zapisujemy

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}$$

gdzie a_{ij} oznacza element znajdujący się w wierszu o numerze i oraz kolumnie o numerze j .

Macierze – podstawowe operacje

Dwie macierze są sobie równe wtedy i tylko wtedy, gdy ich odpowiednie elementy są sobie równe:

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \quad (i=1, \dots, m; j=1, \dots, n)$$

Aby dodać dwie macierze, dodajemy ich odpowiednie elementy, to znaczy:

$$C = A + B \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (i=1, \dots, m; j=1, \dots, n)$$

Zauważmy, że suma dwu macierzy jest zdefiniowana tylko dla macierzy o tych samych wymiarach.

Mnożąc macierz przez skalar mnożymy każdy element macierzy przez skalar, czyli:

$$B = c \cdot A \Leftrightarrow b_{ij} = c \cdot a_{ij} \quad (i=1, \dots, m; j=1, \dots, n)$$

Macierze – mnożenie

Iloczynem macierzy A o wymiarach $m \times n$ i macierzy B o wymiarach $n \times p$ nazywamy macierz C o wymiarach $m \times p$, której element (i,j) jest sumą iloczynów odpowiednich elementów i-tego wiersza macierzy A oraz j-tej kolumny macierzy B, czyli:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, p)$$

Zauważmy, że *aby istniał iloczyn $C=A \cdot B$ liczba kolumn macierzy A musi być równa liczbie wierszy macierzy B*. Macierz C ma tyle wierszy, co macierz A i tyle kolumn, ile macierz B.

Uwaga!!!: mnożenie macierzy nie jest przemienne (często $AB \neq BA$).

Macierze – mnożenie, przykład 1

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 7 & 6 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$C = A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 7 & 6 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \cdot 9 + 1 \cdot 7 + 2 \cdot 5 & 0 \cdot 8 + 1 \cdot 6 + 2 \cdot 4 \\ 3 \cdot 9 + 4 \cdot 7 + 5 \cdot 5 & 3 \cdot 8 + 4 \cdot 6 + 5 \cdot 4 \\ 6 \cdot 9 + 7 \cdot 7 + 8 \cdot 5 & 6 \cdot 8 + 7 \cdot 6 + 8 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 14 \\ 80 & 68 \\ 143 & 122 \end{bmatrix}$$

Macierze – własności działań

Własności działania na macierzach :

$$A + B = B + A$$

$$(AB)C = A(BC) = ABC$$

$$(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$$

$$A(B+C) = AB + AC$$

$$c(A + B) = cA + cB$$

$$AcB = cAB$$

$$(c+d)A = cA + dA$$

$$c(dA) = (cd)A = (dc)A = d(cA)$$

gdzie:

A, B, C – macierze,
c, d – skalary (liczby rzeczywiste);

Macierze – transponowanie

Macierzą transponowaną do macierzy A , która oznaczać będziemy symbolem A' , nazywamy macierz otrzymaną przez zamianę kolumn na wiersze i odwrotnie. Z powyższego wynika, że macierz transponowana do macierzy A o wymiarach $m \times n$ podanej wcześniej ma wymiary $n \times m$ i postać:

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \bullet & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \bullet & a_{m2} \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ a_{1n} & a_{2n} & \bullet & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Uwaga:

$B = A'$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall i, j \quad (b_{ij} = a_{ji})$

własności: $(A')' = A \quad (A+B)' = A' + B' \quad (AB)' = B'A'$

Z. Tarapata, Ekonometria, wykład nr 4

9

Macierze – rodzaje

Macierz nazywamy kwadratową, jeśli posiada tyle kolumn co wierszy, tzn. $n=m$. Główna przekątna składa się z elementów:

$$a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$$

Macierz kwadratową nazwiemy symetryczną, jeśli jest ona równa swojej macierzy transponowanej, tzn.:

$$a_{ij} = a_{ji} \quad (i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n)$$

Z. Tarapata, Ekonometria, wykład nr 4

10

Macierze – rodzaje

Macierz kwadratową, której wszystkie elementy diagonalne (tzn. znajdujące się na głównej przekątnej) są równe 1, a pozostałe elementy są równe 0, nazywamy macierzą jednostkową i oznaczamy przez I :

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \bullet & 0 \\ 0 & 1 & \bullet & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet & 1 \end{bmatrix}$$

Uwaga: jeśli A jest dowolną macierzą, to $I \cdot A = A = A \cdot I$, z czego wynika, że macierz jednostkowa spełnia taką samą rolę jak liczba 1 w algebrze liczb.

Wyznaczniki - podstawy

Dla każdej macierzy kwadratowej A określona jest funkcja skalarna jej elementów nazywana wyznacznikiem macierzy A i oznaczana przez $|A|$. Jeśli A ma wymiary $n \times n$, to $|A|$ nazywamy wyznacznikiem stopnia n -tego. Zdefiniujmy wyznacznik macierzy o wymiarach $n \times n$ sekwencyjnie:

$(n=1)$ jeśli $A = [a]$, to $|A| = a$

$(n=2)$ jeśli $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ to $|A| = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$

Dla $n \geq 2$ wyznacznik macierzy $n \times n$ definiujemy za pomocą wyznaczników podmacierzy o wymiarach $(n-1) \times (n-1)$. Minorem m_{ij} dla elementu a_{ij} w macierzy A o wymiarach $n \times n$ nazywamy wyznacznik podmacierzy otrzymanej przez wykreślenie z macierzy A i -tego wiersza i j -tej kolumny. Dopełnieniem algebraicznym elementu a_{ij} nazywamy wyrażenie $c_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij}$.

Wyznaczniki - wyliczanie

Jeśli A jest macierzą $n \times n$, to :

$$|A| = \sum_{k=1}^n a_{ik} c_{ik} \quad \text{dla } i = 1, \dots, n$$

Inny sposób opisu obliczania wartości wyznacznika :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Wyznaczniki definiuje się przez różnicę sumy iloczynów elementów na odpowiednich ciągłych liniach oraz sumy iloczynów elementów na odpowiednich przerywanych liniach.

Wyznaczniki – przykład 2

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$$

Elementy znajdujące się na tej linii są mnożone, a iloczyny - dodawane

Elementy znajdujące się na tej linii są mnożone, a iloczyny - odejmowane

$$\begin{aligned} |A| &= 0 \cdot 4 \cdot 0 + 1 \cdot 5 \cdot 6 + 2 \cdot 3 \cdot 7 + \\ &- 6 \cdot 4 \cdot 2 - 7 \cdot 5 \cdot 0 - 0 \cdot 3 \cdot 1 = \\ &0 + 30 + 42 - 48 - 0 = 72 - 48 = 24 \end{aligned}$$

Wyznaczniki - własności

Własności wyznaczników:

$$|A| = |A'|$$

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

Definicja (macierze osobliwe i nieosobliwe)

Jeśli A jest macierzą o wymiarach $n \times n$, to A jest macierzą osobliwą wtedy i tylko wtedy, gdy $|A| = 0$, a nieosobliwą wtedy i tylko wtedy, gdy $|A| \neq 0$.

Macierz odwrotna

Macierzą odwrotną do macierzy kwadratowej stopnia n nazywamy macierz kwadratową tego samego stopnia, która ma tę własność, że pomnożona lewostronnie lub prawostronnie przez macierz A daje w wyniku macierz jednostkową.

Macierz odwrotną do macierzy A oznaczamy przez A^{-1} , czyli

$$B = A^{-1} \Leftrightarrow B \cdot A = I = A \cdot B$$

Niech A będzie macierzą stopnia n . Macierz odwrotna A^{-1} istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $|A| \neq 0$, to znaczy istnieją tylko macierze odwrotne do macierzy nieosobliwych.

Macierz odwrotna

Niech $A=[a_{ij}]$ będzie nieosobliwą macierzą kwadratową stopnia n .

Macierz dołączona macierzy A , tj. transponowaną macierz dopełnień algebraicznych elementów macierzy A będziemy oznaczać $adj(A)$; jest to macierz, której element w i -tym wierszu i w j -tej kolumnie jest dopełnieniem algebraicznym elementu a_{ij} (patrz slajd „Wyznaczniki - podstawy”). Przy powyższym oznaczeniu mamy

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot adj(A)$$

Własności:

- jeśli A jest macierz nieosobliwą, to macierz A^{-1} też jest nieosobliwa;
- $(A')^{-1} = (A^{-1})'$;
- jeśli A jest symetryczna i nieosobliwa, to A^{-1} też jest symetryczna;
- jeśli A i B są nieosobliwe, to $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$;
- $I^{-1} = I$.

Macierz odwrotna – algorytm postępowania

Założenie: wyliczamy macierz odwrotną do macierzy $A=[a_{ij}]_{n \times n}$

1. Wyznacz minory m_{ij} , dla $i=1,...,n, j=1,...,n$;
2. Wyznacz dopełnienia algebraiczne $c_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij}$;
3. Z dopełnień algebraicznych c_{ij} utwórz macierz $C=[c_{ij}]_{n \times n}$, a następnie ją transponuj (otrzymasz macierz dołączoną macierzy A , tzn. $adj(A)=C'$);
4. Wyznacz wyznacznik macierzy A (otrzymasz $|A|$);
5. Wylicz macierz odwrotną A^{-1} ze wzoru :

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot adj(A)$$

Macierz odwrotna – przykład 3

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = ?$$

1. Wyznacz minory m_{ij} ,
dla $i=1,\dots,n, j=1,\dots,n$;

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow m_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = 4 \cdot 0 - 7 \cdot 5 = -35$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow m_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 - 6 \cdot 5 = -30$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow m_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot 7 - 6 \cdot 4 = -3$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow m_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 - 7 \cdot 2 = -14$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow m_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot 0 - 6 \cdot 2 = -12$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow m_{23} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 0 \cdot 7 - 6 \cdot 1 = -6$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow m_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 4 \cdot 2 = -3$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow m_{32} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 0 \cdot 5 - 3 \cdot 2 = -6$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow m_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \cdot 4 - 3 \cdot 1 = -3$$

Macierz odwrotna – przykład 3, c.d.

2. Wyznacz dopełnienia
algebraiczne $c_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij}$:

$$c_{11} = (-1)^{1+1} \cdot m_{11} = -35$$

$$c_{12} = (-1)^{1+2} \cdot m_{12} = 30$$

$$c_{13} = (-1)^{1+3} \cdot m_{13} = -3$$

$$c_{21} = (-1)^{2+1} \cdot m_{21} = 14$$

$$c_{22} = (-1)^{2+2} \cdot m_{22} = -12$$

$$c_{23} = (-1)^{2+3} \cdot m_{23} = 6$$

$$c_{31} = (-1)^{3+1} \cdot m_{31} = -3$$

$$c_{32} = (-1)^{3+2} \cdot m_{32} = 6$$

$$c_{33} = (-1)^{3+3} \cdot m_{33} = -3$$

3. Z dopełnień algebraicznych c_{ij}
utwórz macierz $C = [c_{ij}]_{n \times n}$,
a następnie ją transponuj
(otrzymasz macierz dołączoną
macierzy A, tzn. $\text{adj}(A) = C'$):

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -35 & 30 & -3 \\ 14 & -12 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

$$C' = \text{adj}(A) = \begin{bmatrix} -35 & 14 & -3 \\ 30 & -12 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

Macierz odwrotna – przykład 3, c.d.

4. Wyznacz wyznacznik macierzy A (otrzymasz $|A|$) :
wyznaczono w przykładzie 2 i otrzymano $|A| = 24$
5. Wyliz macierz odwrotną A^{-1} ze wzoru :

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot adj(A) = \frac{1}{24} \cdot \begin{bmatrix} -35 & 14 & -3 \\ 30 & -12 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-35}{24} & \frac{14}{24} & \frac{-3}{24} \\ \frac{30}{24} & \frac{-12}{24} & \frac{6}{24} \\ \frac{-3}{24} & \frac{6}{24} & \frac{-3}{24} \end{bmatrix}$$

Układ równań liniowych o n niewiadomych

Macierz odwrotna znajduje bezpośrednie zastosowanie w badaniu rozwiązalności układu równań o n niewiadomych i w wyznaczaniu rozwiązań układu:

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

• • • • •

$$a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

Na mocy definicji mnożenia macierzy układ powyższy możemy zapisać w skrócie jako $Ax = b$, gdzie

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \bullet & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \bullet & a_{2n} \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ a_{n1} & a_{n2} & \bullet & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \bullet \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \bullet \\ b_n \end{bmatrix}$$

Układ równań liniowych o n niewiadomych

Twierdzenie

Jeśli A jest macierzą nieosobliwą o wymiarach $n \times n$, a x i b są wektorami o wymiarach $n \times 1$, to $x = A^{-1} \cdot b$ jest jednoznacznym rozwiązaniem układu n równań liniowych o n niewiadomych,
 $Ax = b$.

Dokładniej $x = A^{-1} \cdot b$ jest rozwiązaniem, ponieważ

$$A \cdot x = A \cdot (A^{-1} \cdot b) = (A \cdot A^{-1}) \cdot b = I \cdot b = b$$

Uwaga: istnieją również inne metody rozwiązywania układu n równań liniowych o n niewiadomych.

Układ równań liniowych o n niewiadomych

Przykład 4

- Rozwiązać układ równań:

$$x_2 + 2x_3 = 24$$

$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 12$$

$$6x_1 + 7x_2 = 36$$

Mamy następujące dane:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 0 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 24 \\ 12 \\ 36 \end{bmatrix}$$

Układ równań liniowych o n niewiadomych

Przykład 4, c.d.

Ponieważ A^{-1} policzyliśmy w przykładzie 3, więc :

$$x = A^{-1} \cdot b = \begin{bmatrix} \frac{-35}{24} & \frac{14}{24} & \frac{-3}{24} \\ \frac{30}{24} & \frac{-12}{24} & \frac{6}{24} \\ \frac{-3}{24} & \frac{6}{24} & \frac{-3}{24} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 24 \\ 12 \\ 36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-35}{24} \cdot 24 + \frac{14}{24} \cdot 12 - \frac{3}{24} \cdot 36 \\ \frac{30}{24} \cdot 24 - \frac{12}{24} \cdot 12 + \frac{6}{24} \cdot 36 \\ \frac{-3}{24} \cdot 24 + \frac{6}{24} \cdot 12 - \frac{3}{24} \cdot 36 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -32.5 \\ 33 \\ -4.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$