POSTACIE ZADAŃ PROGRAMOWANIA LINIOWEGO

Zadanie decyzyjne, w którym wszystkie relacje są liniowe oraz wszystkie zmienne są ciągłe, nazywamy zadaniem programowania liniowego (PL).

Ogólna postać zadania PL jest następująca:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max\,(\min), \tag{2.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i = 1,2,\ldots,m) \tag{2.2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i \quad (i = m+1,\ldots,p) \tag{2.3}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = p+1,\ldots,r) \tag{2.4}$$

$$x_j \ge 0 \qquad (j = 1,2,\ldots,n_1) \tag{2.5}$$

gdzie $n_1 \le n$.

Każdy wektor zmiennych decyzyjnych $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ spełniających warunki ograniczające (2.2) – (2.5) nazywamy rozwiązaniem dopuszczalnym zadania PL. Rozwiązanie dopuszczalne, dla którego funkcja celu (2.1) osiąga maksimum (minimum), nazywamy rozwiązaniem optymalnym.

Parametrami w tym zadaniu są c_j, b_i oraz a_{ij} $(i = 1,2,\ldots,r;\, j = 1,2,\ldots,n)$. Parametr c_j nazywamy j-tą wagą funkcji celu, parametr b_i- i-tym wyrazem wolnym, a parametr a_{ij} – współczynnikiem macierzy ograniczeń stojącym w i-tym wierszu i j-tej kolumnie.

POSTACIE ZADAŃ PROGRAMOWANIA LINIOWEGO, c.d.

Zadaniem PL o postaci standardowej nazywamy zadanie, w którym wszystkie ograniczenia są nierównościami typu ≤ dla zadań na maksimum bądź nierównościami typu ≥ dla zadań na minimum oraz wszystkie zmienne muszą być nieujemne.

Zadaniem PL o postaci kanonicznej nazywamy zadanie, w którym wszystkie warunki ograniczające są równaniami oraz na wszystkie zmienne nałożone są warunki dotyczące ich nieujemności.

Zadaniami PL o postaci standardowej są więc:

$$\begin{array}{l|l}
\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min, \\
\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i=1,2,\ldots,m), & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i \quad (i=1,2,\ldots,m), \\
x_j \ge 0 \quad (j=1,2,\ldots,n). & x_j \ge 0 \, (j=1,2,\ldots,n).
\end{array} \qquad (2.6)$$

UWAGA !

Nierówność ≤ dla zadania na maksimum oraz nierówność ≥ dla zadania na minimum nazywamy nierównościami typowymi, a samo zadanie będziemy oznaczali: PL(max) lub PL(min).

DUALNOŚĆ, REGUŁY TWORZENIA ZADANIA DUALNEGO

Z każdym zadaniem PL (zwanym pierwotnym lub prymalnym) sprzężone jest pewne inne zadanie PL zwane zadaniem dualnym (ZD).

Jeżeli zadaniem pierwotnym (ZP) jest zadanie:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i = 1,2,\ldots,m), \\ \qquad x_j \ge 0 \quad (j = 1,2,\ldots,n), \end{cases} \tag{2.7}$$

to zadaniem dualnym (ZD) będzie zadanie:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min, \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j \quad (j = 1,2,\ldots,n), \\ \qquad y_i \ge 0 \quad (i = 1,2,\ldots,m). \end{cases} \tag{2.8}$$

Z relacji zachodzących między zadaniem pierwotnym a zadaniem dualnym wynika, że:

1. **w zadaniu dualnym jest tyle zmiennych, ile nierówności w zadaniu pierwotnym (każdemu warunkowi ZP odpowiada jedna zmienna ZD),**
2. **w zadaniu dualnym jest tyle warunków, ile zmiennych w zadaniu pierwotnym,**
3. **wagi funkcji celu zadania pierwotnego są wyrazami wolnymi w zadaniu dualnym,**
4. **wyrazy wolne zadanie pierwotnego są wagami funkcji celu w zadaniu dualnym,**
5. **macierz współczynników zadania dualnego jest transpozycją macierzy współczynników zadania pierwotnego,**
6. **jeżeli zadanie jest na maksimum, to dualne jest na minimum i odwrotnie.**

REGUŁY TWORZENIA ZADANIA DUALNEGO, c.d.

W przypadku ogólnym stosujemy ponadto następujące, dodatkowe reguły tworzenia zadania dualnego:

1. **jeżeli w ZP *i*-ty warunek jest równością, to odpowiadająca mu zmienna y_i nie ma ograniczeń,**
2. **jeżeli w ZP *i*-ty warunek jest nietypową nierównością, to w ZD zmienna $y_i \leq 0$,**
3. **jeżeli w ZP na zmienną x_i nie nałożono ograniczeń, to *j*-ty warunek ZD jest równością,**
4. **jeżeli w ZP zmienna $x_i \leq 0$, to w ZD *j*-ty warunek jest nietypową nierównością.**

PRZYKŁAD 2.1

Mamy następujące zadanie pierwotne o postaci standardowej:

$2x_1 + 3x_2 + x_3 \to \min,$		zmienne dualne:
$4x_1 - 6x_2 + 5x_3 \geq 4,$	← (ZP)	y_1 ,
$x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 7,$		y_2
$x_1, x_2, x_3 \geq 0,$		

W zadaniu dualnym będą oczywiście dwie zmienne y_1, y_2, gdyż w ZP występują dwa ograniczenia (co zaznaczono przy ZP), a samo zadanie dualne do rozważanego zadania ZP ma postać:

$$
\begin{aligned}
&4y_1 + 7y_2 \to \max,\\
&4y_1 + y_2 \leq 2,\\
&-6y_1 + 2y_2 \leq 3, \qquad \textbf{(ZD)}\\
&5y_1 + 4y_2 \leq 1,\\
&y_1, y_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

REGUŁY TWORZENIA ZADANIA DUALNEGO, c.d.2

PRZYKŁAD 2.2

Należy utworzyć zadanie dualne do następującego zadania pierwotnego:

$$
\begin{aligned}
&6x_1 + 8x_2 \to \max, \\
&4x_1 + 6x_2 \le 10, \\
&3x_1 + x_2 = 4, \qquad \leftarrow \text{(ZP)} \\
&2x_1 + 2x_2 \ge 2, \\
&x_1 - \text{dowolne}, x_2 \ge 0,
\end{aligned}
$$

zmienne dualne:

$y_1 \ge 0$,

y_2 – dowolne,

$y_3 \le 0$.

Zadanie dualne będzie miało trzy zmienne (bo w ZP występują trzy ograniczenia) i dwa warunki ograniczające (bo w ZP występują dwie zmienne):

$$
\begin{aligned}
&10y_1 + 4y_2 + 2y_3 \to \min, \\
&4y_1 + 3y_2 + 2y_3 = 6, \\
&6y_1 + y_2 + 2y_3 \ge 8, \qquad \textbf{(ZD)} \\
&y_1 \ge 0, y_2 - \text{dowolne}, y_3 \le 0.
\end{aligned}
$$

TWIERDZENIA O DUALNOŚCI

TWIERDZENIE 1 (o istnieniu)

Jeżeli ZP i ZD mają rozwiązania dopuszczalne, to obydwa mają rozwiązania optymalne. Jeżeli natomiast chociaż jedno z nich nie ma rozwiązania dopuszczalnego, to obydwa nie mają rozwiązań optymalnych.

TWIERDZENIE 2

Jeżeli $x_1, x_2, \dots, x_n$ **jest rozwiązaniem dopuszczalnym zadania pierwotnego (prymalnego), a** $y_1, y_2, \dots, y_m$ **- rozwiązaniem dopuszczalnym zadania dualnego, to między wartościami funkcji celu zachodzi nierówność:**

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \, . \tag{2.9}$$

Dla rozwiązań dopuszczalnych wartość funkcji celu ZP nie może być większa od wartości funkcji celu ZD.

TWIERDZENIE 3 (o optymalności)

Jeżeli istnieją dwa takie rozwiązania dopuszczalne $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ **(ZP) i** $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_m$ **(ZD), że:**

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \bar{x}_j = \sum_{i=1}^{m} b_i \bar{y}_i ,$$

to obydwa rozwiązania są rozwiązaniami optymalnymi.

TWIERDZENIA O DUALNOŚCI, c.d.

TWIERDZENIE 4 (o równowadze)

Jeżeli $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jest rozwiązaniem dopuszczalnym ZP oraz $y_1, y_2, \ldots, y_m$ jest rozwiązaniem dopuszczalnym ZD, to aby te rozwiązania były rozwiązaniami optymalnymi wystarcza, że spełnione są następujące warunki:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j < b_i \Rightarrow y_i = 0, \tag{2.10}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i > c_j \Rightarrow x_i = 0, \tag{2.11}$$

$$y_i > 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \tag{2.12}$$

$$x_j > 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j, \tag{2.13}$$

Twierdzenie o równowadze wykorzystujemy do sprawdzania optymalności znanego rozwiązania dopuszczalnego lub do znajdowania rozwiązania optymalnego dla przypadku szczególnego, gdy zadanie PL ma tylko dwa warunki ograniczające.

INTERPRETACJA EKONOMICZNA ZADANIA DUALNEGO

Przypomnijmy, że zadanie pierwotne (2.7) opisuje problem maksymalizacji przychodu osiąganego z produkcji n wyrobów. Zużycie środków produkcji nie może przekroczyć zasobów, jakimi dysponujemy. Waga c_j oznacza cenę j-tego wyrobu, współczynnik a_{ij} – wielkość zużycia i-tego środka na produkcję jednostki j-tego wyrobu, wyraz wolny b_i – zasób i-tego środka produkcji, a zmienna x_j – wielkość produkcji j-tego wyrobu.

Aby nierówności w zadaniu (2.8) miały sens, zmienną y_i interpretujemy jako cenę i-tego środka. Załóżmy, że konkurent chce nabyć od producenta środki produkcji.

Jaką ich cenę powinien zaoferować?

Z pewnością chciałby odkupić środki produkcji najtaniej. Proponuje więc, aby suma $\sum_{i=1}^{m} b_i y_i$, czyli wartość funkcji celu zadania dualnego (!!!), była minimalna. Konkurent musi się liczyć z faktem, że jeżeli zaoferuje producentowi zbyt niską cenę, to ten posiadanych środków nie sprzeda.
Cena za niska to taka, kiedy przychód ze sprzedaży tych środków byłby niższy od przychodu, jaki producent może uzyskać kierując je do produkcji.
Gdyby producent sprzedał środki niezbędne do produkcji jednostki j-tego produktu po cenach y_i $(i = 1,2,\ldots,m)$, to dostałby sumę $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_i$.

Opłaci się więc sprzedać środki, jeżeli:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_i \quad (j = 1,2,\ldots,n) \tag{2.14}$$

Warunek (2.14) stanowi ograniczenie zadania dualnego (!!!).

Zadanie dualne jest więc zadaniem, jakie **powinien rozwiązać konkurent pragnący nabyć środki produkcji od producenta, jeżeli chciałby działać racjonalnie i liczy na racjonalne zachowanie producenta**.

INTERPRETACJA EKONOMICZNA ZADANIA DUALNEGO, c.d.

Jak wynika z twierdzenia 3, optymalna wartość zmiennej y_i określa nam, o ile wzrośnie (zmniejszy się) przychód, jeżeli zwiększymy (zmniejszymy) zasób *i*-tego środka produkcji o jednostkę. Ten wniosek jest prawdziwy, jeżeli zmiany mieszczą się w dopuszczalnych granicach i dotyczą tylko jednego środka.

Zmienna dualna y_i określa, zgodnie z neoklasyczna teorią ekonomii, krańcową produktywność jednostki *i*-tego środka.

Jeżeli produktywność *i*-tego środka wyznaczona przez optymalne y_i wynosi 10 PLN, a cena, po jakiej nabywa producent *i*-ty środek, c_i = 8 PLN, to opłaci się zwiększyć zasób *i*-tego środka o taką ilość, aż nastąpi zrównanie wartości y_i z wartością c_i (czyli o 2 PLN). Jeżeli natomiast c_i wynosi 12 PLN i po tej cenie można sprzedać jednostkę *i*-tego środka, to przy y_i równej 10 PLN należy zmniejszyć zasób *i*-tego środka (o 2 PLN), gdyż więcej zyskamy przeznaczając jednostkę *i*-tego środka na sprzedaż niż do produkcji.

Dosyć oczywistą interpretację ekonomiczną mają w tej sytuacji warunki (2.10) – (2.13) twierdzenia o równowadze:

1. jeżeli zużycie *i*-tego środka produkcji jest mniejsze od posiadanego zasobu, to wycena (krańcowa produktywność) jednostki *i*-tego środka jest zerowa,
2. jeżeli wartość środków zużytych na wytworzenie jednostki *j*-tego produktu jest większa od jego ceny, to produkcja tego wyrobu jest zerowa,
3. jeżeli wycena *i*-tego środka jest dodatnia, to zużycie środka musi być równe jego zasobowi,
4. jeżeli produkcja *j*-tego wyrobu jest dodatnia, to wartość środków zużytych na jednostkę *j*-tego produktu jest równa jego cenie.

GRAFICZNA METODA ROZWIĄZYWANIA ZADAŃ PL

Weźmy następujące zadanie (strona 25, wykład nr 1).

$$f(x) = 30x_1 + 40x_2 \to \max$$

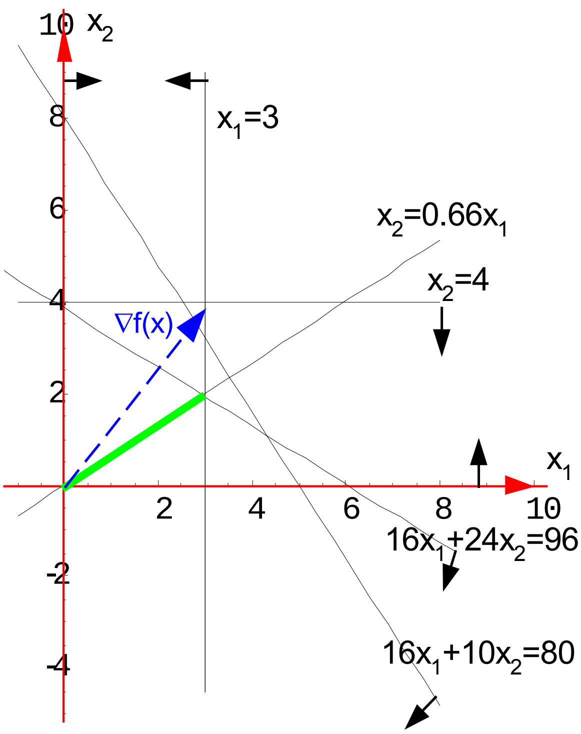
przy ograniczeniach:

$$D = \left\{ (x_1, x_2): \begin{array}{l} 16x_1 + 24x_2 \le 96 \\ 16x_1 + 10x_2 \le 80 \\ 0 \le x_1 \le 3 \\ 0 \le x_2 \le 4 \\ x_2 = \frac{2}{3} \cdot x_1 \\ x_1, x_2 \geq= 0 \end{array} \right\}$$

W celu rozwiązania zadania metodą graficzną należy postępować według następującej procedury:

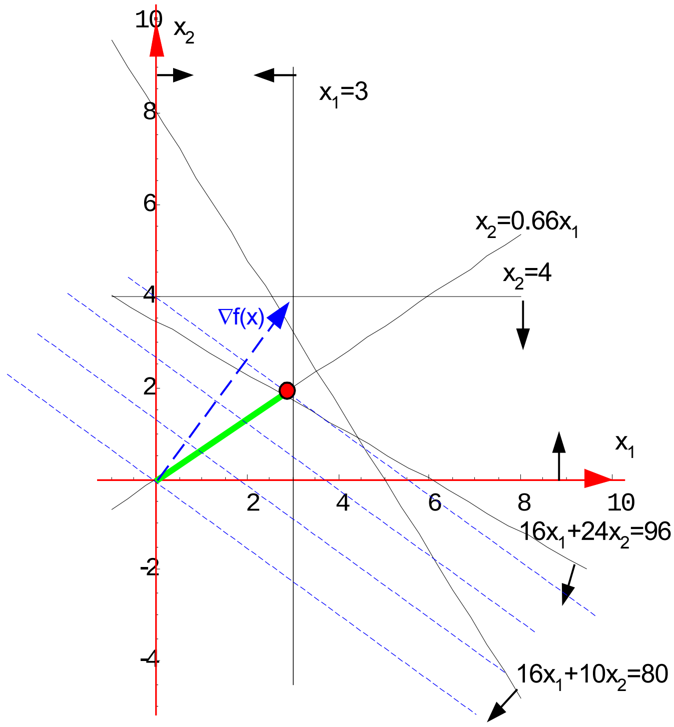
1. **narysować w układzie współrzędnych zbiór ograniczeń (zbiór rozwiązań dopuszczalnych) (Rys.2.1),**
2. **wyznaczyć wektor gradientu $\nabla f(x)$ funkcji celu (kryterium), (Rys.2.1, 2.2)**
3. **naszkicować prostą prostopadłą do wektora gradientu $\nabla f(x)$, (Rys.2.2);**
4. **przesuwając prostą prostopadłą z punktu 3 w kierunku zgodnym z kierunkiem wektora gradientu, znaleźć punkt (lub odcinek) podparcia zbioru rozwiązań dopuszczalnych przez prostą. Punkt ten (lub odcinek) jest rozwiązaniem zadania. W przypadku, gdy funkcja celu jest minimalizowana, należy kierować się w kierunku przeciwnym do kierunku wektora gradientu.**

GRAFICZNA METODA ROZWIĄZYWANIA ZADAŃ PL, c.d.



wskazuje kierunek półpłaszczyzny, którą generuje prosta
zbiór ograniczeń (rozwiązań dopuszczalnych)

Rys. 2.1



wskazuje kierunek półpłaszczyzny, którą generuje prosta
zbiór ograniczeń (rozwiązań dopuszczalnych)
rozwiązanie optymalne

Rys.2.2

Gradient $\nabla f(x)$ funkcji celu jest równy $\nabla f(x) = (30{,}40)$ (ponieważ dzieląc obie współrzędne gradientu przez tę samą liczbę nie zmienia się jego nachylenie, to podzielimy je przez 10). Wektor ten został zaznaczony na rysunku po prawej stronie niebieską, przerywaną strzałką.

Rozwiązaniem optymalnym zadania jest punkt x^*=(3,2), dla którego wartość funkcji celu jest maksymalna i wynosi $f(x^*)$=30·3+40·2=170.

UWAGA!
To, że otrzymaliśmy rozwiązanie całkowitoliczbowe (tzn. x_1=3, x_2=2) jest tylko przypadkiem.
Generalnie metoda nie daje gwarancji na otrzymanie rozwiązania całkowitoliczbowego (jeśli istnieje taka potrzeba).

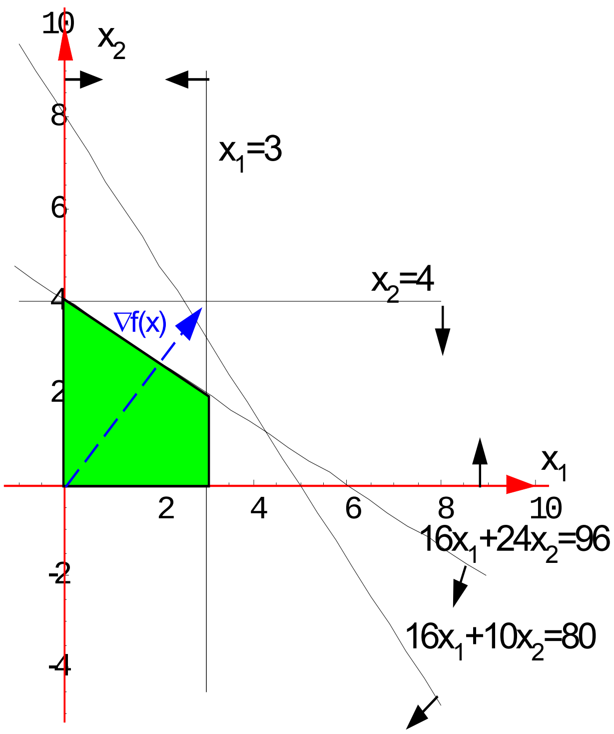
Zmodyfikujmy zadanie poprzednio rozpatrywane poprzez wyeliminowanie ostatniego ograniczenia, tzn. ograniczenia $x_2 = \frac{2}{3} \cdot x_1$.

Otrzymamy wówczas zadanie :

$$f(x) = 30x_1 + 40x_2 \to \max$$

przy ograniczeniach:

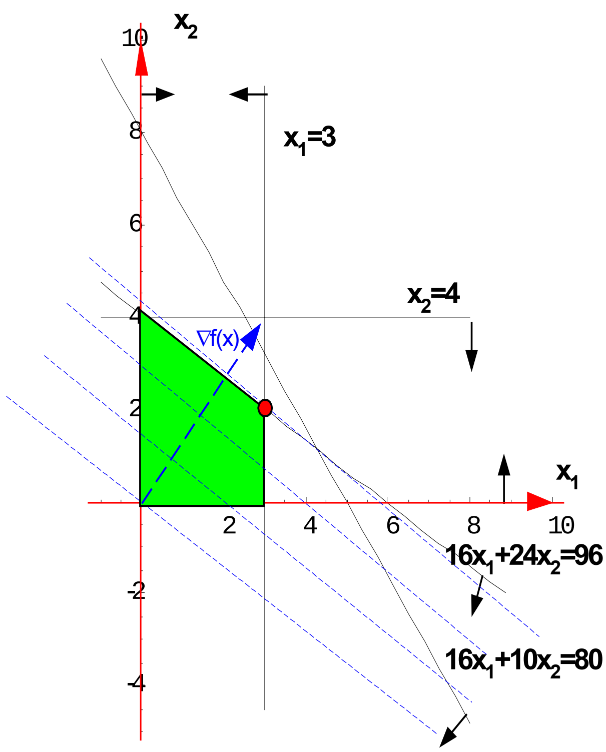
$$D = \left\{ (x_1, x_2): \begin{array}{c} 16x_1 + 24x_2 \le 96 \\ 16x_1 + 10x_2 \le 80 \\ 0 \le x_1 \le 3 \\ 0 \le x_2 \le 4 \end{array} \right\}$$



wskazuje kierunek półpłaszczyzny, którą generuje prosta
zbiór ograniczeń (rozwiązań dopuszczalnych)

Rys.2.3

Zauważmy, że zmienił się zbiór ograniczeń ! (Rys.2.3)



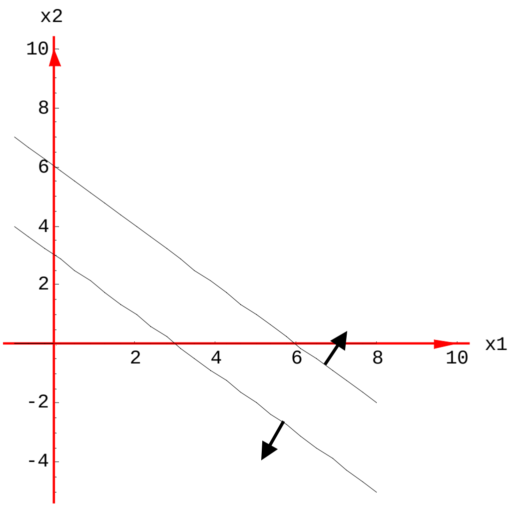
wskazuje kierunek półpłaszczyzny, którą generuje prosta
zbiór ograniczeń (rozwiązań dopuszczalnych)
rozwiązanie optymalne

Rys.2.4

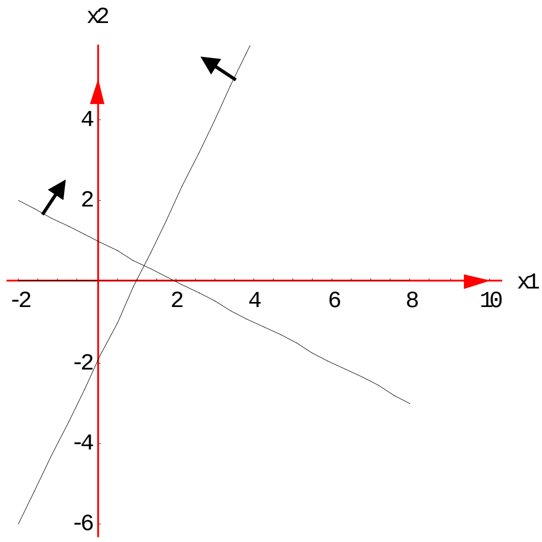
Rozwiązaniem optymalnym tego zadania jest również punkt o współrzędnych $x^* = (3,2)$**, dla którego wartość funkcji celu jest maksymalna i wynosi** $f(x^*) = 30 \cdot 3 + 40 \cdot 2 = 170$.

UWAGI DOTYCZĄCE METODY GRAFICZNEJ ROZWIĄZYWANIA ZADAŃ PL

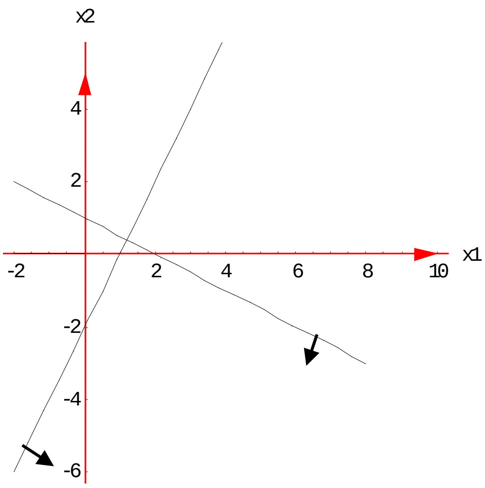
- **metoda graficzna może zostać zastosowana tylko do takich zadań, w których liczba zmiennych wynosi 2 (ewentualnie liczba ograniczeń wynosi 2 – wówczas możemy skonstruować zadanie dualne i rozwiązać je metodą graficzną);**
- **nie nadaje się ona do algorytmizacji i komputerowej implementacji (stosujemy wówczas najbardziej znaną metodę rozwiązywania zadań PL – tzw. algorytm simpleks);**
- **pozwala w prosty sposób zidentyfikować tzw. zadania ze sprzecznymi ograniczeniami oraz nieograniczoną wartością funkcji celu (o liczbie zmiennych równej 2), (rysunki poniżej).**



zadanie ze sprzecznymi ograniczeniami



zadanie z nieograniczoną od góry wartością funkcji celu



zadanie z nieograniczoną od dołu wartością funkcji celu