5. OPTYMALIZACJA GRAFOWO-SIECIOWA

Definicja grafu

Pod pojęciem **grafu** ***G*** rozumiemy następującą dwójkę uporządkowaną (definicja grafu Berge'a):

(5.1) $G=\langle W,U\rangle$

gdzie:

W – zbiór wierzchołków grafu,

U – zbiór łuków grafu, $U \subset W \times W$,

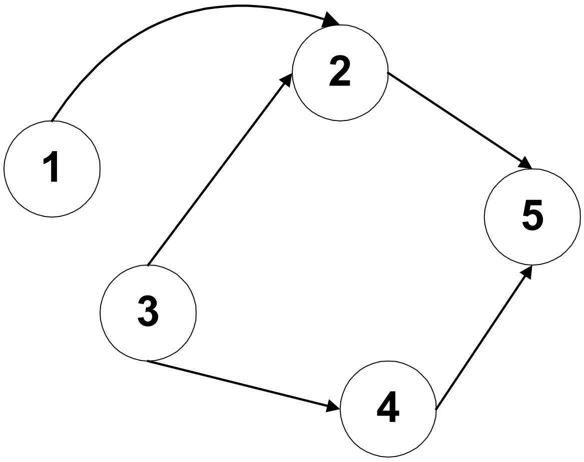
$u(x,y) \in U \Leftrightarrow x \in W \wedge y \in W \wedge$ istnieje przejście z x do y.

Za pomocą grafu możemy opisywać (modelować) wszelkiego rodzaju obiekty rzeczywiste (obiekty fizyczne, zjawiska, procesy itp.), które posiadają pewne cechy (wierzchołki grafu) i pewne relacje między cechami (łuki grafu).

Typowe reprezentacje obiektów rzeczywistych za pomocą grafów:

- Struktura sieci dróg (wierzchołki - miasta lub skrzyżowania, łuki – odcinki dróg);
- Struktura dowolnego systemu (wierzchołki – elementy systemu, łuki – powiązania między elementami systemu);
- Mapa polityczna świata (wierzchołki – państwa, łuki – sąsiedztwo między państwami);
- Struktura przedsięwzięcia (wierzchołki – zdarzenia, łuki - czynności);
- Problem przydziału np. pracowników do zadań (wierzchołki – pracownicy i zadania do wykonania, łuki – zdolność pracownika do wykonania zadania);
- Drzewo genealogiczne (wierzchołki – osoby, łuki – relacja typu „rodzic-dziecko”).

Przykład grafu



Rys.5.1

Dla tego grafu mamy:

$$W = \{1,2,3,4,5\}$$
$$U = \{(1,2),(2,5),(3,2),(3,4),(4,5)\}$$

Graf ten może opisywać np. strukturę sieci dróg osiedlowych, gdzie wierzchołkami grafu są skrzyżowania (i zakręty) dróg, a łuki wskazują odcinki drogi i kierunek jazdy między dwoma sąsiednimi skrzyżowaniami.

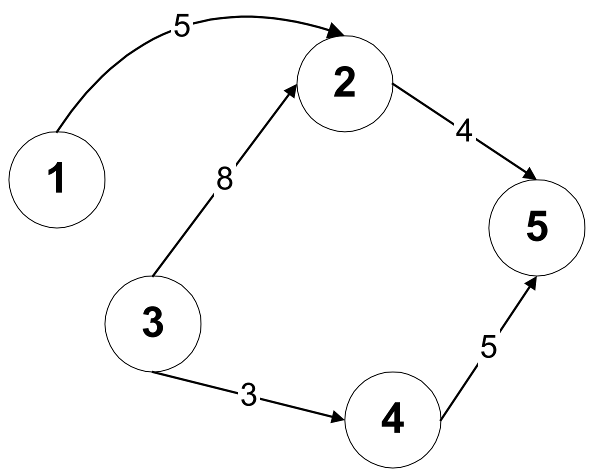
Graf spójny to taki graf, w którym między każdą parą wierzchołków istnieje marszruta (czyli ciąg naprzemienny wierzchołków i łuków rozpoczynający się w wierzchołku początkowym (jeden z wierzchołków pary) i kończący się w wierzchołku końcowym (jako drugi wierzchołek pary), przy czym zwrot łuków nie gra roli).

Graf antycykliczny (acykliczny) to taki, w którym nie można wyjść z dowolnego wierzchołka i powrócić do niego za pomocą drogi (marszruty, w której kierunek łuków gra rolę).

Definicja sieci

Sieć, to graf opisany ilościowo, tzn. jest to taki graf, w którym zostały opisane pewne funkcje na wierzchołkach i (lub) na łukach.

Przykład sieci



Rys.5.2

Mamy graf zdefiniowany jak poprzednio:

$$W = \{1,2,3,4,5\}$$
$$U = \{(1,2),(2,5),(3,2),(3,4),(4,5)\}$$

i dodatkowo funkcję opisaną na każdym łuku, która opisuje np. długość łuku (czyli długość odcinka drogi łączącego sąsiednie skrzyżowania (zakręty)).

MODEL SIECIOWY PRZEDSIĘWZIĘCIA

Rozważać będziemy przedsięwzięcie jako wyodrębniony zbiór czynności powiązanych ze sobą technologią, tj. sposobem wykonania. Ową technologię nazywać będziemy ***strukturą***, odwzorowanie zaś przedsięwzięcia – ***projektem***.
Projekt przedstawiać będziemy w postaci tzw. ***sieci czynności***.

DEFINICJA 5.1

Sieć czynności to graf spójny acykliczny, który ma jeden wierzchołek początkowy i jeden wierzchołek końcowy. Łuki sieci reprezentują czynności, wierzchołki zaś zadania.

Przykład 5.1

Przedstawimy projekt wprowadzenia nowego produktu na rynek. Przedsięwzięcie takie składa się z czynności dotyczących sfery projektowania produkcji, jak również działań związanych z badaniem rynku. Zestaw takich czynności przedstawiono w tabeli poniżej.

Tabela 5.1

Czynności $\langle i, j \rangle$	*Nazwa czynności*
$\langle 1,2 \rangle$	a – badanie popytu na rynku
$\langle 1,3 \rangle$	b – nabycie surowców na prototypy
$\langle 3,4 \rangle$	c – wyprodukowanie prototypów i ocena ich jakości
$\langle 4,5 \rangle$	d – nabycie surowców do produkcji
$\langle 4,6 \rangle$	e – wybór opakowań
$\langle 4,7 \rangle$	f – analiza kosztów produkcji
$\langle 8,9 \rangle$	g – proces produkcji wyrobu
$\langle 10,11 \rangle$	h – wysyłka do sklepów
$\langle 6,10 \rangle$	i – reklama i zbieranie zamówień
$\langle 5,9 \rangle$	j – nabycie opakowań
$\langle 9,10 \rangle$	k – pakowanie wyrobu gotowego
$\langle 7,8 \rangle$	l – analiza ekonomicznych parametrów decyzji po podjęciu produkcji

KONSTRUKCJA SIECI CZYNNOŚCI

Do wykreślenia sieci czynności dla dowolnego projektu niezbędne są informacje dotyczące czynności wchodzących w skład przedsięwzięcia oraz ustalenie kolejności ich występowania.

Zasady tworzenia sieci czynności:

1. zdarzenie początkowe nie ma czynności poprzedzających,
2. zdarzenie końcowe nie ma czynności następujących,
3. dwa kolejne zdarzenia mogą być połączone tylko jedną czynnością,
4. wszystkie zdarzenia w sieci, z wyjątkiem początkowego lub końcowego, powinny być początkiem i końcem co najmniej jednej czynności.

Etapy konstruowania sieci czynności:

1. ustalenie listy czynności,
2. ustalenie zdarzenia początkowego i końcowego przedsięwzięcia,
3. określenie kolejności wykonywania czynności,
4. numerowanie wierzchołków.

Przykład 5.2

Opisane wyżej postępowanie zilustrujemy przykładem budowy sieci przedsięwzięcia dotyczącego przygotowania wystawy.

1. Ustalenie listy czynności.

W zadaniu tym można wyodrębnić następujące czynności:
A – wybór lokalizacji wystawy,
B – przygotowanie eksponatów,
C – przygotowanie terenu wystawy,
D – przygotowanie stoisk,
E – dostawa eksponatów,
F – przygotowanie obsługi stoisk (ustalenie składu osobowego i szkolenie),
G – urządzenie stoisk wystawowych,
H – otwarcie wystawy.

2. Ustalenie zdarzenia początkowego i końcowego przedsięwzięcia;

Zdarzeniem początkowym jest „podjęcie decyzji o urządzeniu wystawy”, a zdarzeniem końcowym „otwarcie wystawy”.

3. Określenie kolejności wykonywania czynności.

Należy dla każdej czynności ustalić:

- czynności poprzedzające, czyli te, które powinny być zakończone przed rozpoczęciem danej czynności,

- czynności równoległe, tzn. te, które mogą być wykonywane jednocześnie z czynnością rozpatrywaną,

- czynności następujące, tzn. te, które powinny się rozpocząć po rozpatrywanej czynności.

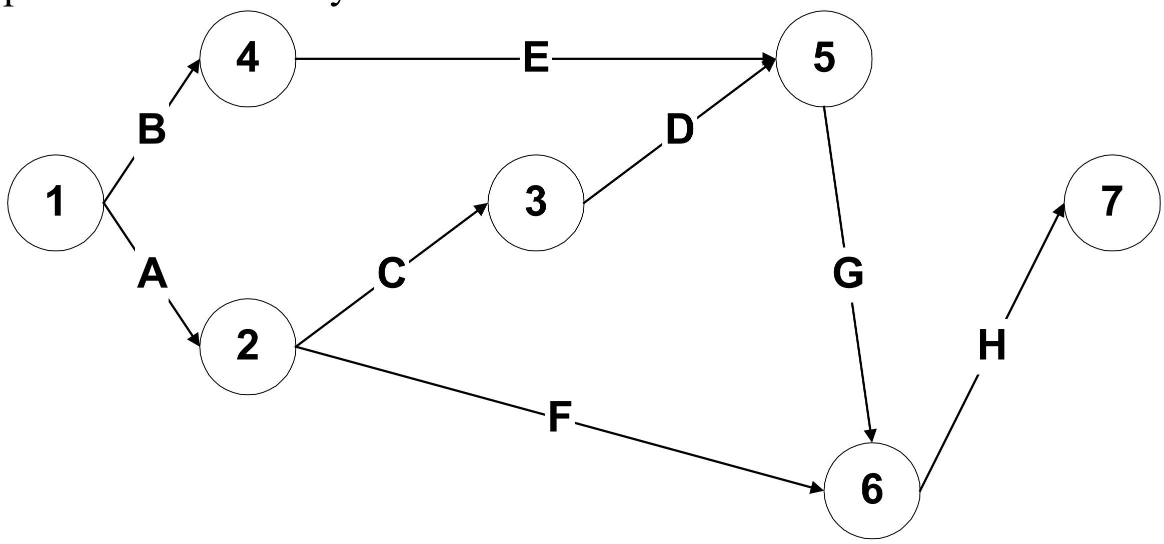
Powiązania między czynnościami dla rozpatrywanego przedsięwzięcia przedstawiono w tablicy 5.2.

Tabela 5.2

Czynności	Czynności bezpośrednio:	
	poprzedzające	następujące
A (wybór lokalizacji wystawy)	-	C, F
B (przygotowanie eksponatów)	-	E
C (przygotowanie terenu wystawy)	A	D
D (przygotowanie stoisk)	C	G
E (dostawa eksponatów)	B	G
F (przygotowanie obsługi stoisk)	A	H
G (urządzenie stoisk wystawowych)	E, D	H
H (otwarcie wystawy)	F, G	-

4. Numerowanie wierzchołków.

Przy numerowaniu wierzchołków sieci (zdarzeń) należy uwzględnić, że następują one w określonej kolejności oraz to, że ***zdarzenie będące początkiem czynności powinno mieć numer mniejszy niż zdarzenie, które jest końcem tej czynności***. Strzałka wskazująca kolejność wykonywania czynności powinna więc prowadzić od zdarzenia o numerze mniejszym do zdarzenia o numerze większym. Uporządkowanie wierzchołków zgodnie z powyższą zasadą można uzyskać za pomocą **algorytmu porządkowania warstwowego**. Sieć czynności rozpatrywanego przedsięwzięcia przedstawiono na rysunku 5.3.



Rys.5.3

ANALIZA SIECI Z FUNKCJĄ CZASU

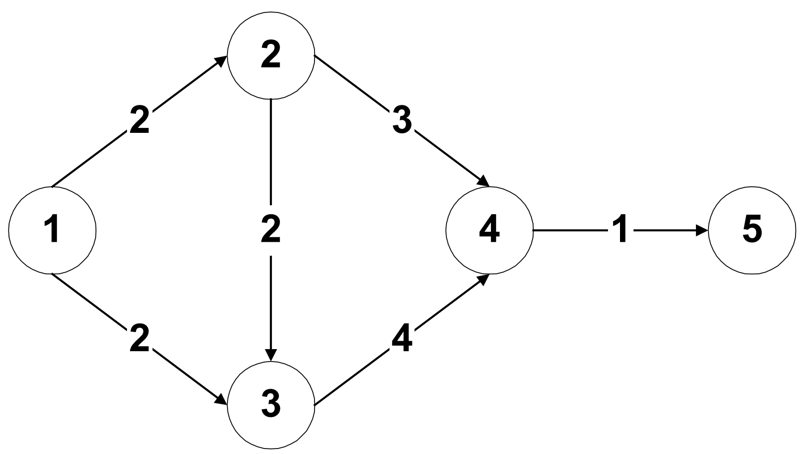
Rozważmy przedsięwzięcie opisane siecią czynności, która spełnia następujące warunki:

1. jest grafem prostym,
2. wierzchołki są ponumerowane, 1, 2, ...*n*, w taki sposób, że jeżeli *i* poprzedza *j*, to $i<j$ (przypomnijmy, że ten drugi warunek oznacza, że każdy następnik ma numer większy od poprzednika),
3. każdej czynności przedsięwzięcia (reprezentowanej w sieci przez łuk) przyporządkujemy nieujemną liczbę t_{ij}, którą interpretujemy jako czas wykonania czynności $\langle i,j \rangle$, gdzie *i* reprezentuje początek czynności, a *j* jest wydarzeniem końcowym.

Rozważmy **zbiór ścieżek pełnych**, tj. prowadzących od wydarzenia początkowego do wydarzenia końcowego, i oznaczmy go przez ***S***, przy czym zbiór ten jest niepusty i skończony.

Na rys. 5.4 mamy trzy ścieżki pełne, $S = \{s_1, s_2, s_3\}$,
gdzie:

$$s_1 = \{\langle 1,2 \rangle, \langle 2,4 \rangle, \langle 4,5 \rangle\},$$
$$s_2 = \{\langle 1,2 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 3,4 \rangle, \langle 4,5 \rangle\},$$
$$s_3 = \{\langle 1,3 \rangle, \langle 3,4 \rangle, \langle 4,5 \rangle\}.$$



Rys.5.4

W sieci czynności każdej ścieżce pełnej s_k przyporządkowany jest jednoznacznie **czas wykonania ścieżki**:

$$t(s_k) = \sum_{\langle i,j \rangle \in s_k} t_{ij} \tag{5.2}$$

DEFINICJA 5.2

Czasem realizacji projektu określonym przez czas trwania czynności będziemy nazywali czas t^*:

$$t^* = \max_{s_k \in S} t(s_k) \tag{5.3}$$

Dalej wprowadzimy istotne dla naszej analizy pojęcie ścieżki krytycznej. Podstawę analizy stanowi bowiem **metoda ścieżki krytycznej** (ang. *Critical path method* - CPM).

DEFINICJA 5.3

Ścieżką krytyczną w sieci czynności nazywamy ścieżkę pełną, dla której czas trwania jest najdłuższy.

Biorąc pod uwagę powyższe definicje, można powiedzieć, że **możliwie najkrótszy termin realizacji przedsięwzięcia określony jest przez czas ścieżki krytycznej, tj. ścieżki pełnej, która w przedsięwzięciu ma określony najdłuższy czas**.

W sensie organizacji działań oznacza to, że nie można zrealizować przedsięwzięcia wcześniej (przy założeniu stałej struktury, jak i czasu wykonywania czynności) zanim nie wykona się najdłuższego, w sensie czasu, ciągu następujących po sobie czynności. W naszym przypadku mamy: $t(s_1) = 6$, $t(s_2) = 9$, $t(s_3) = 7$. Ścieżką krytyczną jest ścieżka s_2: $\langle 1,2 \rangle$, $\langle 2,3 \rangle$, $\langle 3,4 \rangle$, $\langle 4,5 \rangle$.

Czas wykonywania czynności zgodnie z tą ścieżką określa możliwy najkrótszy termin zakończenia przedsięwzięcia.

Wygenerowanie ścieżek pełnych i obliczenie czasu w dużych sieciach o skomplikowanej strukturze, w tzw. sieciach gęstych, nie jest sprawą prostą, a poza tym nie umożliwia uzyskania odpowiedzi na pytanie, jak powinny być uporządkowane w czasie poszczególne czynności. Zatem niezbędne jest wyznaczenie planu wykonania zadań w czasie, czemu służy ***procedura wyznaczania charakterystyk dla zdarzeń i czynności***. Przedstawimy je w kolejności, najpierw dla zdarzeń, a potem dla czynności.

Charakterystyki dla zdarzeń

DEFINICJA 5.4

Najwcześniejszy możliwy termin zaistnienia zdarzenia określony jest wzorem:

(5.4) $$t_j^0 = \max_i \{t_i^0 + t_{ij}\}, \quad i < j,$$

gdzie t_i^0 oznacza najwcześniejszy możliwy termin wystąpienia *i-tego* zdarzenia bezpośrednio poprzedzającego zdarzenie *j-te*.

Uwaga: $t_1^0 = 0$.

DEFINICJA 5.5

Najpóźniejszy dopuszczalny termin zaistnienia *i-tego* zdarzenia, t_i^1, wyznaczony jest następująco:

(5.5) $$t_i^1 = \min_j \{t_j^1 - t_{ij}\}, \quad i < j,$$

gdzie t_j^1 oznacza najpóźniejszy dopuszczalny termin zaistnienia *j-tego* zdarzenia, następującego po *i-tym* zdarzeniu, przy czym $t_n^0 < t_n^1$, lub $t_n^1 = t^*$

Uwaga

Najwcześniejszy i najpóźniejszy termin zdarzenia końcowego są sobie równe, gdyż zdarzenie to nie ma następników.

DEFINICJA 5.6

Luz czasowy L_i dowolnego zdarzenia *i-tego* określamy w następujący sposób:

(5.6) $$L_i = t_i^1 - t_i^0 .$$

Uwaga

Luz czasowy zdarzenia wskazuje, ile może opóźnić się termin zaistnienia zdarzenia bez wpływu na termin zakończenia realizacji projektu.

Charakterystyki dla czynności

DEFINICJA 5.7

Najwcześniejszy możliwy termin rozpoczęcia czynności ⟨*i,j*⟩ wyznacza najwcześniejszy możliwy termin zajścia zdarzenia początkowego tej czynności.

DEFINICJA 5.8

Najpóźniejszy dopuszczalny termin rozpoczęcia czynności określony jest przez różnicę $t_j^1 - t_{ij}$.

DEFINICJA 5.9

Najwcześniejszy możliwy termin zakończenia czynności ⟨i,j⟩ wyrażony jest przez sumę $t_i^0 + t_{ij}$.

DEFINICJA 5.10

Najpóźniejszy dopuszczalny termin zakończenia czynności ⟨i,j⟩ określa najpóźniejszy termin zajścia zdarzenia końcowego tej czynności.

DEFINICJA 5.11

Zapas całkowity Z_c określony jest za pomocą równania:

(5.7) $$Z_c = t_j^1 - t_i^0 - t_{ij} .$$

Uwaga

Stanowi on rezerwę czasu, który może być wykorzystany dodatkowo na wykonanie danych czynności, bez wpływu na termin realizacji projektu.

DEFINICJA 5.12

Zapas swobodny Z_s określony jest równaniem:

(5.8) $$Z_s = t_j^0 - t_i^0 - t_{ij}$$

Uwaga

Wykorzystanie tego zapasu nie ma wpływu na zapasy związane z czynnościami należącymi do danej ścieżki.

DEFINICJA 5.13

Zapas warunkowy Z_w określony jest następująco:

(5.9) $$Z_w = t_j^1 - t_i^1 - t_{ij}$$

Uwaga

Ta rezerwa czasu może być wykorzystana bez zmniejszania zapasów poprzednich, określonych dla danej ścieżki.

DEFINICJA 5.14

Zapas niezależny Z_n oblicza się według wzoru:

(5.10) $$Z_n = t_j^0 - t_i^1 - t_{ij}$$

Uwaga

Wykorzystanie tej rezerwy nie ma wpływu na zapas jakiejkolwiek innej czynności.

Można wykazać, że **dla czynności należących do ścieżki krytycznej wszystkie zapasy są równe zeru**. Tym samym wydłużenie jakiejkolwiek czynności krytycznej o jednostkę powoduje opóźnienie terminu realizacji projektu o jednostkę. W przypadku występowania jednej ścieżki, każde skrócenie czasu trwania jednej z czynności krytycznych o jednostkę powoduje skrócenie o jednostkę czasu realizacji projektu.

Wyznaczone terminy zajścia zdarzeń, terminy rozpoczęcia i zakończenia czynności składają się na plan wykonania zadań w czasie realizacji projektu zwany **harmonogramem**.

Przykład 5.3

Dla przykładowej sieci przedstawionej na rys.5.4 harmonogramy dotyczące zdarzeń i czynności zawarto w tabelach 5.3 i 5.4.

Tabela 5.3

Zdarzenia *i*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
t_i^0	0	2	4	8	9
t_i^1	0	2	4	8	9
L_i	0	0	0	0	0

Np. dla zdarzenia *i=2*

$$t_2^0 = \max \left\{t_1^0 + t_{12}\right\} = 2$$

$$t_2^1 = \min \left\{t_3^1 - t_{23}, t_4^1 - t_{24}\right\} = \min \left\{4-2, 8-3\right\} = 2$$

$$L_2 = t_2^1 - t_2^0 = 2 - 2 = 0$$

Tabela 5.4

Czynności		*Czas trwania*	*Zapas czasu*			
i	*j*	t_{ij}	Z_c	Z_s	Z_w	Z_n
1	2	2	0	0	0	0
1	3	2	2	2	2	0
2	3	2	0	0	0	0
2	4	3	3	3	3	3
3	4	4	0	0	0	0
4	5	1	0	0	0	0

Np. dla czynności $\langle 2,4\rangle$

$$Z_c = t_4^1 - t_2^0 - t_{24} = 8 - 2 - 3 = 3$$

$$Z_s = t_4^0 - t_2^0 - t_{24} = 8 - 2 - 3 = 3$$

$$Z_n = t_4^0 - t_2^1 - t_{24} = 8 - 2 - 3 = 3\,.$$

Z harmonogramów tych wynika, że wszystkie zdarzenia należą do ścieżki krytycznej, o czym informują nas ich luzy czasowe. Ścieżkę krytyczną tworzą np. czynności: $\langle 1,2\rangle$, $\langle 2,3\rangle$, $\langle 3,4\rangle$, i $\langle 4,5\rangle$. Ich zapasy czasu są zerowe.

PROBLEMY DRÓG EKSTREMALNYCH

Definicja drogi ekstremalnej

Droga ekstremalna w sieci jest to ciąg naprzemienny wierzchołków i łuków w grafie, rozpoczynający się w wierzchołku początkowym x^p i kończący się wierzchołku końcowym x^k, charakteryzujący się tym, że długość drogi (mierzona, jako suma długości łuków wchodzących w jej skład) jest najmniejsza lub największa spośród innych dróg z x^p do x^k w sieci (w drodze ważny jest zwrot łuków).

Sieć standardowa dla problemu dróg ekstremalnych:

(5.11) $$S = \langle G, \varnothing, \{l\} \rangle$$

gdzie:

$l : U \to R$

$l(u)$ – „koszt” gałęzi $u \in U$;

$U(\mu(x^p,x^k))$ – zbiór gałęzi drogi $\mu(x^p,x^k)$ z wierzchołka x^p do x^k;

(5.12) $$F\left(\mu(x^p, x^k)\right) = \sum_{u \in U\left(\mu(x^p, x^k)\right)} l(u)$$ **- „koszt” drogi $\mu(x^p,x^k)$.**

Definicja problemu wyznaczania drogi ekstremalnej:

w sieci S znaleźć taką drogę $\mu^* \in D\left(x^p, x^k\right)$, dla której

(5.13a) $$F\left(\mu^*(x^p, x^k)\right) = \min_{\mu(x^p, x^k) \in D(x^p, x^k)} F\left(\mu(x^p, x^k)\right)$$

lub

(5.13b) $$F\left(\mu^*(x^p, x^k)\right) = \max_{\mu(x^p, x^k) \in D(x^p, x^k)} F\left(\mu(x^p, x^k)\right)$$

gdzie $D\left(x^p, x^k\right)$ - zbiór wszystkich dróg prostych w G z x^p do x^k .

Definicja problemu wyznaczania drogi ekstremalnej w sieci jako zadania PLB:

Przyjmijmy oznaczenia:

N – zbiór numerów wierzchołków grafu G, $\overline{\overline{N}} = \overline{\overline{W}}$;

$Q = N / \{x^p, x^k\}$ - zbiór numerów wierzchołków grafu z pominięciem x^p oraz x^k;

c_{ij} – długość łuku $u(i, j) \in U$;

$$c_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{gdy } i = j \\ +\infty, & \text{jeśli z } i \text{ do } j \text{ brak przejścia (dla zadań na min)} \\ -\infty, & \text{jeśli z } i \text{ do } j \text{ brak przejścia (dla zadań na max)} \\ wartosc & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

x_{ij} – zmienna decyzyjna binarna,

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli łuk } u(i,j) \text{ należy do drogi ekstremalnej} \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Sformułowanie zadania optymalizacji:

(5.14)
$$\sum_{i \in N} \sum_{j \in N} c_{ij} \cdot x_{ij} \to \min(\max)$$

przy ograniczeniach:

(5.15), (5.16), (5.17)
$$\sum_{j \in N} x_{ji} - \sum_{j \in N} x_{ij} = 0, \quad \forall i \in Q$$
$$\sum_{j \in N} x_{sj} = 1$$
$$\sum_{j \in N} x_{jt} = 1, \; x_{ij} \in \{0,1\}, \; \forall i \in N \; \forall j \in N$$

Przykład 5.4

Dla sieci z rys.5.4 wyznaczyć drogę najdłuższą z wierzchołka $s=1$ do $t=5$.
Mamy następujące zadanie optymalizacji:

$$\max \quad 2x_{12} + 2x_{13} + 2x_{23} + 3x_{24} + 4x_{34} + x_{45}$$

przy ograniczeniach:

$$x_{12} - x_{23} - x_{24} = 0$$

$$x_{13} + x_{23} - x_{34} = 0$$

$$x_{24} + x_{34} - x_{45} = 0$$

$$x_{12} + x_{13} = 1$$

$$x_{45} = 1$$

$$x_{ij} \in \{0,1\},\ i = \overline{1,5},\ j = \overline{1,5}$$

Rozwiązując to zadanie (np. Solver'em z arkusza Excel) otrzymujemy:

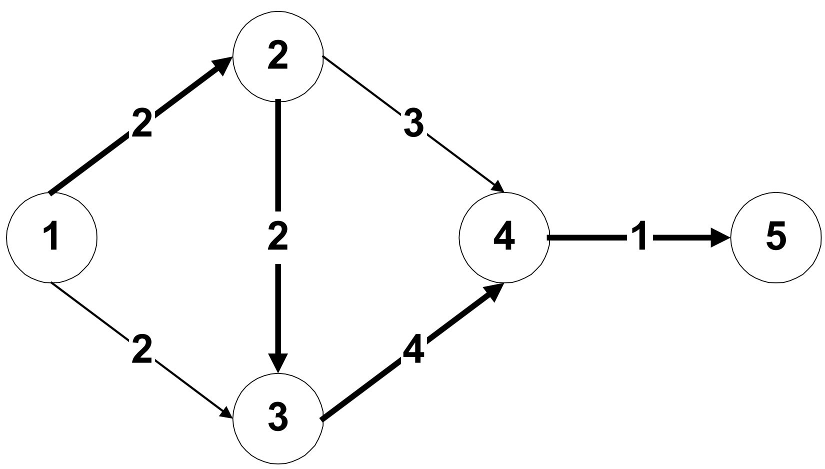
$$\left.\begin{array}{l} x_{12}^* = 1 \\ x_{13}^* = 0 \\ x_{23}^* = 1 \\ x_{24}^* = 0 \\ x_{34}^* = 1 \\ x_{45}^* = 1 \end{array}\right\}$$

Stąd droga optymalna (najdłuższej długości) jest następująca:

$$1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5$$

a jej długość wynosi:

$$2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = \mathbf{9}$$



Sieci acykliczne – algorytm programowania dynamicznego wyznaczania drogi ekstremalnej

$$\mu^*\left(x^p, x^k\right) = ? \quad \text{w} \quad G^I = \left\langle W, U^I, P^I \right\rangle$$

- $\Omega\left(x^p\right)$ **- zbiór wierzchołków osiągalnych z x^p w G^I;**
- $\Pi\left(x^k\right)$ **- zbiór wierzchołków, z których w G^I osiągalny jest x^k;**
- $X = \Omega\left(x^p\right) \cap \Pi\left(x^k\right)$ **- zbiór wierzchołków, które mogą wystąpić w $\mu\left(x^p, x^k\right)$;** **$X = \varnothing \Rightarrow$ nie istnieje $\mu\left(x^p, x^k\right)$;**
- $G = \left\langle X, U, P \right\rangle$ **- podgraf generowany przez $X \subset W$;**
- $W_0, W_1, \ldots, W_k$ **- warstwy w G;** $x^p \in W_0; x^k \in W_K$
- $X_i^{dop} = W_i \cap X$ **- zbiór tzw. stanów dopuszczalnych w *i*-tym etapie;**
- $U_{dop}(x) = \left\{ u \in U : \bigvee_{y \in X} \left\langle x, u, y \right\rangle \in P \right\}$ **- zbiór tzw. sterowań dopuszczalnych dla stanu $x \in X$;**
- $m(\mu)$**- liczba łuków w drodze μ;**

Funkcje etapowe:

- $F_{i,K}(x,u) = l(u) + F_{i+1}^*\left(y(x,u)\right) \quad , \quad i = \overline{0, K-1}$
- $F_i^*(x) = \underset{u \in U_{dop}(x)}{\mathrm{extr}} \left[l(u) + F_{i+1}^*\left(y(x,u)\right) \right]$

  przy czym $y(x,u) = y \in X : \left\langle x, u, y(x,u) \right\rangle \in P$
- $u_i^*(x) = u^* : F_{i,K}\left(x, u^*\right) = F_i^*(x)$

  przy czym $x \in \bigcup_{j=i}^{K} X_j^{dop}; \quad F_K^*(x) = 0; \quad u_K^*(x) = \varnothing$.

ALGORYTM

0. Przedstawić graf G w układzie warstwowym (konstruując etapy);

1. Wyznaczyć X_i^{dop} **dla każdego etapu** $i = \overline{1, K}$ **;**

2. Dla każdego wierzchołka *x* określić zbiór $U_{dop}(x), \quad i := K - 1$ **;**

3. Dla każdego wierzchołka $x \in X_i^{dop}$ **wyznaczyć** $F^*(x)$ **oraz** $u^*(x)$ **(są to cechy wierzchołka *x*). Jeżeli *i*=0, to przejście do pkt. 4, w przeciwnym przypadku *i*:=*i* – 1 i powtórz punkt 3;**

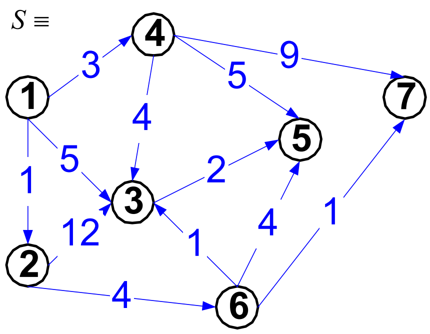
4. Koniec algorytmu.

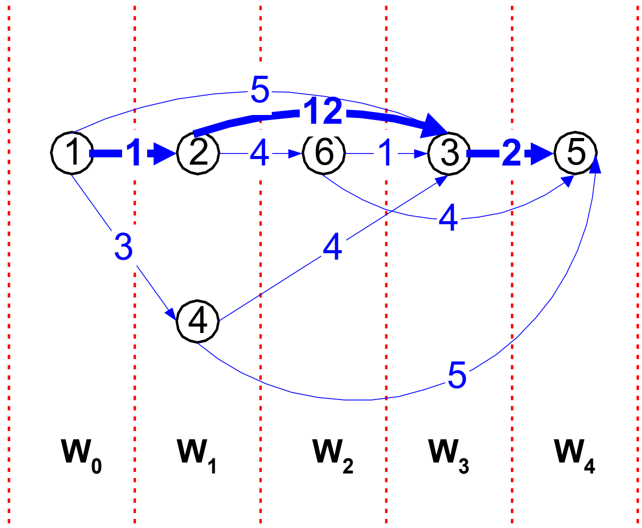
Długość drogi ekstremalnej określa $F^*(x^p)$**, a drogę ekstremalną wyznaczają cechy** $u^*(x)$**, począwszy od wierzchołka początkowego** x^p**, zgodnie z wyrażeniem** $x_{s+1} = y(x_s, u^*(x_s)), \quad s = 1,2,\ldots,m(\mu)$.

- **Dendryt dróg ekstremalnych** $\Rightarrow$ **dla problemu dróg ekstremalnych przyjąć** x^k **– dowolne;**
- **Antydendryt dróg ekstremalnych** $\Rightarrow$ **zamiana łuków na przeciwnie skierowane.**

PRZYKŁAD

W sieci S wyznaczyć najdłuższą drogę z $x^p = 1$ do $x^k = 5$.





$x^p = 1$, $x^k = 5$, $\mu_{max}(1,5) = ?$

$$\left.\begin{array}{l}\Omega(x^p) = \Omega(1) = \{1,2,3,4,5,6,7\} \\ \Pi(x^k) = \Pi(5) = \{1,2,3,4,5,6\}\end{array}\right\} \rightarrow X = \Omega(1) \cap \Pi(5) = \{1,2,3,4,5,6\}$$

$$X_0^{dop} = \{1\}, X_1^{dop} = \{2,4\}, X_2^{dop} = \{6\}, X_3^{dop} = \{3\}, X_4^{dop} = \{5\},$$

$$U_{dop}(1) = \{u_{1,2}, u_{1,3}, u_{1,4}\}, U_{dop}(2) = \{u_{2,6}, u_{2,3}\}, U_{dop}(3) = \{u_{3,5}\}$$

$$U_{dop}(4) = \{u_{4,3}, u_{4,5}\}, U_{dop}(5) = \varnothing, U_{dop}(6) = \{u_{6,3}, u_{6,5}\}$$

Wartość poszczególnych funkcji etapowych $F_i^*(x)$ oraz $u^*(x)$ przedstawia tabela.

x	5	3	6	2	4	1
i- nr etapu	4	3	2	1	1	0
$F_i^*(x)$	0	2	4	14	6	15
$u^*(x)$	$\varnothing$	$u_{3,5}$	$u_{6,5}$	$u_{2,3}$	$u_{4,3}$	$u_{1,2}$
$y(x, u^*(x))$	$\varnothing$	5	5	3	3	2

np. dla x=6 mamy

$$F_2^*(6) = \max_{u \in \{u_{6,3}, u_{6,5}\}} \left[l(u) + F_3^*(y(6,u)) \right] =$$

$$= \max\{l(u_{6,3}) + F_3^*(3), l(u_{6,5}) + F_3^*(5)\} =$$

$$= \max\{1+2, 4+0\} = 4$$

Z przeprowadzonych w tabeli wyliczeń wynika, że długość najdłuższej drogi $\mu_{max}(1,5)$ wynosi $F(\mu_{\max}(1,5)) = F_0^*(1) = \mathbf{15}$**.**

Droga najdłuższa jest następująca (z x^p=1 do x^k=5):

$1 \rightarrow u_{1,2} \rightarrow 2 \rightarrow u_{2,3} \rightarrow 3 \rightarrow u_{3,5} \rightarrow 5.$